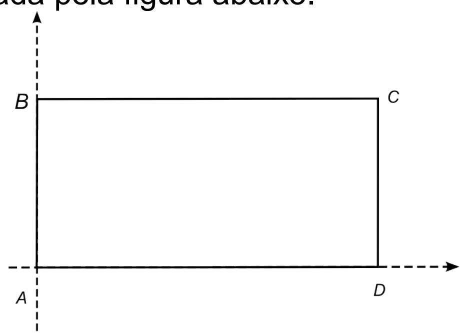
O Centro de Seleção da Universidade Federal de Goiás divulga as *respostas esperadas oficiais* das questões das provas de Geometria Analítica e Introdução ao Cálculo da primeira avaliação da terceira etapa do Processo Seletivo Estendido 2009-1. As respostas foram utilizadas como referência no processo de correção. Foram também consideradas corretas outras respostas que se relacionaram ao conjunto de ideias correspondentes às expectativas da banca quanto à abrangência e à abordagem do conhecimento. Respostas parciais também foram aceitas, sendo que a pontuação a elas atribuída considerou os diferentes níveis de acerto. A seguir serão apresentadas as respostas esperadas oficiais da cada questão seguida do critério de correção utilizado pela banca corretora.

GEOMETRIA ANALÍTICA

QUESTÃO 1

(a) **1ª Solução**

A quadra é representada pela figura abaixo.



Observando a figura tem-se que:

$B=(0,20)$ e $D=(40,0)$.

OU

2ª Solução

Os vértices são:

$B=(0,20)$ e $D=(40,0)$.

(10,0 pontos)

Critério de Correção:
O candidato que fez a representação geométrica consistente com as informações apresentadas, atendeu os objetivos esperados.

(b) Sendo o centro da quadra o ponto médio M, do segmento AC, concluímos que: $M(20,10)$.

(15,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que calculou o ponto médio do segmento e identificou o centro do retângulo como o ponto de encontro de suas diagonais, atendeu aos objetivos esperados.

QUESTÃO 2

(a) **1ª Solução**

Considerando as equações paramétricas que regem o movimento do ponto, o vetor direcional é $v=(1,2)$. Assim um vetor direcional da reta procurada é $(-2,1)$ ou $(2,-1)$ e portanto, uma equação da reta na forma paramétrica é

$x=3-2\mathrm{t}$
$y=1+t.$

OU,

2ª Solução

Transformar a equação que descreve o movimento do ponto da forma paramétrica para a reduzida $y=2\mathrm{x}-1.$

Sabe-se que se duas retas são perpendiculares o produto dos seus coeficientes angulares é igual a *-1.* Logo, o coeficiente angular da reta procurada é $m=\frac{-1}{2}\cdot$ Então, a reta passando pelo ponto *(3, 1) que é* perpendicular a reta que descreve o movimento é $y=\frac{5}{2}-\frac{x}{2},$ ou $x+2\mathrm{y}-5=0.$

(15,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que mostrou conhecimento da relação existente entre duas retas perpendiculares, bem como, a forma paramétrica da equação de uma reta, atendeu os objetivos esperados.

(b) A posição P mais próxima do ponto $(3,1)$ é obtida, calculando-se a intersecção das duas retas. Portanto, $P(\frac{7}{5},\frac{9}{5})\cdot$

(10,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que observou que o ponto mais próximo de $(3,1)$ é obtido através da intersecção das duas retas, atendeu aos objetivos esperados.

QUESTÃO 3

(a) O produto escalar $u.v=(1,2).(-1,3)=1(-1)+2(3)=-1+6=5$.

(5,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que calculou o produto escalar, atendeu aos objetivos esperados.

(b) $\cos(\theta)=\frac{u.v}{|u||v|}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Portanto, *o ângulo é* $\theta=\frac{\pi}{4}$ radianos.

(5,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que calculou cosseno do ângulo e obteve o valor correto do ângulo*,* atendeu aos objetivos esperados.

(c) Como $2u+v=2(1,2)+(-1,3)=(2,4)+(-1,3)=(1,7)$*,* então,
$(2u+v).w=(1,7).(1,4)=1(1)+7(4)=1+28=29$ .Assim,
$P_w^{(2u+v)}=\frac{(2u+v)\cdot w}{|w|^2}w=\frac{29}{17}\cdot(1,4)=(\frac{29}{17},\frac{116}{17})$.

(5,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que calculou a projeção ortogonal, atendeu aos objetivos esperados.

(d) A equação $w=k_1u+k_2v$*,* implica que $(1,4)=k_1(1,2)+k_2(-1,3)$. Portanto, tem-se o seguinte sistema $\begin{matrix} k_1-k_2=1 \\ 2k_1+3k_2=4, \end{matrix}$ cuja solução é $k_1=\frac{7}{5}$ e $k_2=\frac{2}{5}$.

(10,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que obteve o sistema em função de k_1 e k_2 e resolveu o sistema corretamente, atendeu aos objetivos esperados.

QUESTÃO 4

(a) Seja $P(x_{0,}y_0)$ o centro da circunferência. Como o diâmetro é 4, então a ordenada do centro da circunferência é $y_0=2$.

A abscissa do centro da circunferência é obtida pela equação $tg(30^0)=\frac{2}{x_0}$ e, por consequência, $x_0=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$. .

Portanto, a equação da circunferência é $(x-\frac{6}{\sqrt{3}})^2+(y-2)^2=4$, ou $(x-2\sqrt{3})^2+(y-2)^2=4$.

(15,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que determinou o centro e a equação da circunferência corretamente, atendeu aos objetivos esperados.

(b) Sabe-se que a reta bissetriz do ângulo de 60^0, contém a origem e o centro $P=(2\sqrt{3},2)$ da circunferência. Então $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x.$

(10,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que obteve a equação corretamente, atendeu aos objetivos da questão.

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

QUESTÃO 1

a) Calculando o valor da expressão numérica tem-se , $\frac{4}{3}+\frac{1}{4}-\frac{7}{12}=\frac{16+3-7}{12}=\frac{12}{12}=1$.

(12,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que fez corretamente as operações numéricas e chegou no resultado correto, atendeu aos objetivos esperados.

(b) Simplificando a expressão algébrica tem-se $\frac{x-1}{x+1}-1=\frac{x-1-x-1}{x+1}=\frac{-2}{x+1}$.

(13,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que fez corretamente as operações algébricas e chegou no resultado correto, atendeu aos objetivos esperados.

QUESTÃO 2

(a) O domínio e a imagem são, respectivamente, os intervalos $[0,24]$ e $[0,10]$.

(5,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que reconheceu o domínio e a imagem da função observando o gráfico, atendeu aos objetivos esperados.

(b) Às 14 horas a concentração é máxima e atinge o valor de 10 miligramas/litro.

(5,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que reconheceu o ponto máximo da função no gráfico, atendeu aos objetivos esperados.

(c) A concentração é crescente nos intervalos $[0,2]$ e $[12,14]$. A concentração é decrescente nos intervalos $[2,12]$ e $[14,24]$. **(5,0 pontos)**

Critério de Correção: O candidato que determinou corretamente os intervalos de crescimento e decrescimento da função,atendeu aos objetivos esperados.

(d) Não, pois existe valor de y que é imagem de dois valores distintos de t.

(5,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidado que interpretou corretamente o conceito de injetividade observando o gráfico, atendeu aos objetivos esperados

(e) A concentração cresce mais rapidamente no intervalo $[0,2]$. **(5,0 pontos)**

Critério de Correção: O candidato que reconheceu o intervalo onde a função varia mais rapidamente, atendeu aos objetivos esperados.

QUESTÃO 3

(a) Substituindo os valores 1, -1 e $\frac{1}{2}$ no lugar de x na função $f(x)=\frac{2x+1}{x-4}$ obtém-se, respectivamente,

$$f(1)=\frac{2\cdot 1+1}{1-4}=\frac{3}{-3}=-1 \;,\; f(-1)=\frac{2\cdot(-1)+1}{-1-4}=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5} \text{ e } f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\cdot\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-4}=\frac{1+1}{\frac{1-8}{2}}=\frac{2}{\frac{-7}{2}}=-\frac{4}{7}.$$

(5,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que substituiu os valores e fez corretamente as operações numéricas e chegou aos resultados corretos, atendeu aos objetivos esperados.

(b) Como o denominador não pode assumir o valor zero temos $x-4\neq 0\Rightarrow x\neq 4$. Portanto o domínio de f é: $\{x\in\mathbb{R} : x\neq 4\}$. **(5,0 pontos)**

Critério de Correção:

Se o candidato observou que o denominador não pode ser zero e determinou corretamente o domínio da função, atendeu aos objetivos esperados.

(c) Igualando a função $f(x)=\frac{2x+1}{x-4}$ a 1 tem-se a seguinte equação

$$\frac{2x+1}{x-4}=1 \;,$$

resolvendo obtém-se

$$2x+1=-x+4\Rightarrow 3x=3\Rightarrow x=1.$$

(5,0 pontos)

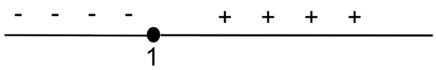
Critério de Correção:

O candidato que obteve e resolveu corretamente a equação, atendeu aos objetivos esperados.

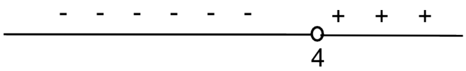
(d) Ao se fazer $f(x) \geqslant -1$, tem-se

$$\frac{2x+1}{x-4} \geqslant -1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-4} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1+x-4}{x-4} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{3x-3}{x-4} \geqslant 0 \;,$$

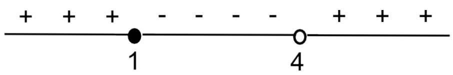
ao se estudar o sinal do numerador da expressão, tem-se



ao se estudar o sinal do denominador da expressão, tem-se



ao se fazer análise do sinal do quociente, tem-se



Portanto, $f(x) \geqslant -1$ se $\{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 1 \; ou \; x > 4\}$. **(5,0 pontos)**

Critério de Correção:

O candidato que obteve e resolveu corretamente a inequação, atendeu aos objetivos esperados.

(e) Ao se fazer $|f(x)| = 3$, tem-se

$$\left|\frac{2x+1}{x-4}\right| = 3$$

portanto,

$$\frac{2x+1}{x-4} = 3 \quad \text{ou} \quad \frac{2x+1}{x-4} = -3\,.$$

A solução da primeira equação é,

$$\frac{2x+1}{x-4} = 3 \Rightarrow 2x+1 = 3x-12 \Rightarrow 2x-3x = -12-1 \Rightarrow x = 13,$$

a solução da segunda equação é,

$$\frac{2x+1}{x-4} = -3 \Rightarrow 2x+1 = -3x+12 \Rightarrow 2x+3x = 12-1 \Rightarrow x = \frac{11}{5}.$$

(5,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que obteve a equação envolvendo o módulo e resolveu corretamente, atendeu aos objetivos esperados.

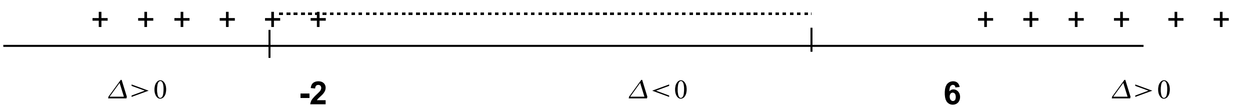
QUESTÃO 4

I -

Sabe-se que o número de raízes depende do sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4\mathrm{ac}$.

Tem-se que: $\Delta = (m-2)^2 - 4.(4) = m^2 - 4\mathrm{m} + 4 - 16 = m^2 - 4\mathrm{m} - 12$. E,

$$\Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4\mathrm{m} - 12 = 0 \rightarrow \begin{matrix} m' = -2 \\ m'' = 6 \end{matrix} .$$



(a) As raízes de $p(x)$ são reais e distintas se $\Delta > 0$. Assim $m < -2$ ou $m > 6$.

(5,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que reconheceu as condições para existência de raízes de uma equação do segundo grau e determinou os valores esperados de m, atendeu aos objetivos esperados.

(b) Se $\Delta = 0$ as raízes são $m = -2$ e $m = 6$. **(5,0 pontos)**

Critério de Correção:

O candidato que reconheceu as condições para existência de raízes de uma equação do segundo grau e determinou os valores esperados de m, atendeu aos objetivos esperados.

(c) Se $-2 < m < 6$, $p(x)$ não tem raiz real. **(5,0 pontos)**

Critério de Correção:

O candidato que reconheceu as condições para existência de raízes de uma equação do segundo grau e determinou os valores esperados de m, atendeu aos objetivos esperados.

II-

Para $m = -4$, temos $x^2 - 6\mathrm{x} + 4 = 0$. Logo,

$$x_v = \frac{x' + x''}{2} = \frac{-b}{2\mathrm{a}} = \frac{-(-6)}{2} = 3.$$

$$y_v = 3^2 - 6(3) + 4 = 9 - 18 + 4 = -5.$$

Portanto, o vértice é o ponto $(3, -5)$. **(5,0 pontos)**

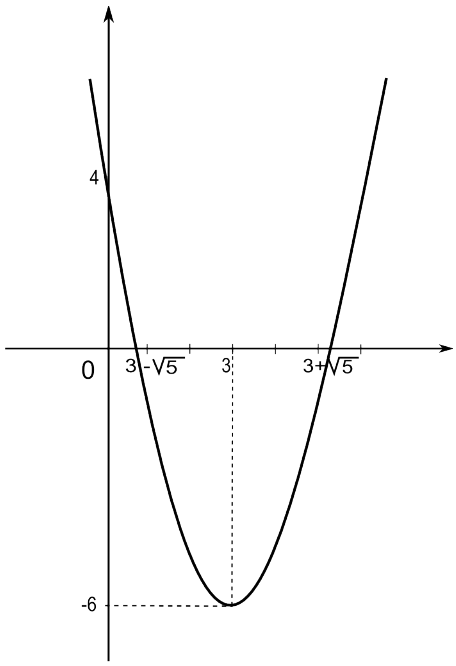
Critério de Correção:

O candidato que calculou o vértice da parábola, atendeu aos objetivos esperados.

III-

Da equação $x^2 - 6x + 4 = 0$ segue que: $x = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2}$.

Assim, $\begin{matrix} x' = 3 - \sqrt{5} \\ x'' = 3 + \sqrt{5} \end{matrix}$. Segue então que um esboço do gráfico é



(5,0 pontos)

Critério de Correção:

O candidato que esboçou corretamente o gráfico da parábola, atendeu aos objetivos esperados.