CENTRO DE SELEÇÃO UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE GRADUAÇÃO
CENTRO DE SELEÇÃO

UFG UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS 50 ANOS
CONHECIMENTO SEMPRE PRESENTE

PROCESSO SELETIVO ESTENDIDO/2011-1

# CADERNO DE QUESTÕES

## TERCEIRA AVALIAÇÃO

## 26/06/2011

# Geometria Analítica
# Introdução ao Cálculo

SÓ ABRA ESTE CADERNO QUANDO AUTORIZADO

**LEIA ATENTAMENTE AS INSTRUÇÕES**

1. Quando for permitido abrir o caderno, verifique se ele está completo ou se apresenta imperfeições gráficas que possam gerar dúvida. Caso contenha defeito, solicite ao aplicador a sua troca.

2. Este caderno contém as provas de Geometria Analítica, com 4 questões, e de Introdução ao Cálculo, com 4 questões. Utilize os espaços em branco deste caderno para rascunho.

3. A duração das provas será de 4 horas, já incluídas nesse tempo a leitura dos avisos e a coleta de impressão digital.

4. Você só poderá retirar-se definitivamente da sala e do prédio após terem decorridas **duas horas** de prova e poderá levar este caderno de prova somente **uma hora** antes do horário determinado para o término da prova.

5. AO TERMINAR, DEVOLVA OS CADERNOS DE RESPOSTAS AO APLICADOR DE PROVA.

## GEOMETRIA ANALÍTICA

### QUESTÃO 1

Admita dois objetos $A$ e $B$ em movimento retilíneo uniforme cujas trajetórias são dadas pelas equações

$$A(t):\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{cases} \quad \text{e} \quad B(s):\begin{cases} x=-4+3s \\ y=-4+3s \\ z=-1+2s \end{cases}$$

em que $t$ e $s$ representam o tempo, em minutos. De acordo com o exposto:

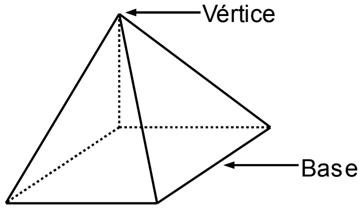
a) determine o ponto $P$ de encontro das trajetórias dos objetos $A$ e $B$; **(12,0 pontos)**

b) determine a distância entre os objetos $A$ e $B$, após decorrido o tempo de três minutos. **(13,0 pontos)**

### QUESTÃO 2

Uma **pirâmide** é um poliedro em que uma das faces é um polígono qualquer, que é chamado de **base**; e as outras faces são triângulos que têm um vértice comum chamado **vértice da pirâmide**.

Por exemplo, a figura a seguir representa uma pirâmide de base quadrangular.




A **altura** $h$ de uma pirâmide é a distância do vértice da pirâmide ao plano da base.

Considerando o exposto, determine a altura da pirâmide de base triangular definida pelos pontos $A=(0,0,0)$, $B=(2,0,0)$ e $C=(2,1,1)$ e cujo vértice é o ponto $V=(1,0,4)$. **(25,0 pontos)**

### QUESTÃO 3

Considerando o paralelepípedo definido pelos vetores $u=(1,2,1)$, $v=(0,2,2)$ e $w=(0,0,3)$, determine:

a) a área da face definida pelos vetores $u$ e $v$; **(13,0 pontos)**

b) o volume desse paralelepípedo. **(12,0 pontos)**

### QUESTÃO 4

Uma quádrica é dada pela seguinte equação:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$$

De acordo com esta equação,

a) identifique a quádrica justificando a resposta; **(12,0 pontos)**

b) determine a curva de interseção da quádrica com o plano $z=9$. **(13,0 pontos)**

# INTRODUÇÃO AO CÁLCULO

## QUESTÃO 1

Um importante teorema sobre divisibilidade de polinômios é o chamado Teorema do Resto, segundo o qual "*o resto da divisão de um polinômio* $p(x)$ *por* $x-a$ *é o valor numérico de* $p(x)$ *em* $x=a$*, isto é,* $p(a)$". Uma consequência deste teorema é o Teorema de D'Alembert: "*um polinômio* $p(x)$ *é divisível por* $x-a$*, se, e somente se,* $p(a)=0$*.*"

Com base no exposto,

a) determine o valor de $b$ para que o polinômio $p(x)=2x^3+5x^2-bx+2$ seja divisível por $x-2$. **(12,0 pontos)**

b) obtenha o quociente da divisão de $p(x)=2x^3+5x^2-19x+2$ por $x-2$. **(13,0 pontos)**

## QUESTÃO 2

Para cada $t \in \mathbb{R}$, definindo o número complexo $g(t)$ como $g(t)=\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t$, são verdadeiras as identidades $|g(t)|=1$ e $\dfrac{1}{g(t)}=g(-t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Tendo em vista o exposto,

a) calcule $g\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ e $g(\pi)$ e represente-os no plano complexo. **(12,0 pontos)**

b) demonstre as identidades mencionadas no enunciado. **(13,0 pontos)**

## QUESTÃO 3

O teorema de Pitágoras diz que a hipotenusa, $a$, de um triângulo retângulo e seus catetos $b$ e $c$ obedecem à relação $a^2=b^2+c^2$. Pode-se também mostrar que é válido o recíproco deste teorema: *"Se as medidas* $u$, $v$ *e* $w$*, dos lados de um triângulo forem tais que* $u^2=v^2+w^2$*, o referido triângulo é um triângulo retângulo do qual* $u$ *é a hipotenusa e* $v$, $w$ *são catetos."*

Com base neste fato, pode-se concluir, por exemplo, que os números $z_1=2i$, $z_2=2$ e $z_2-z_1=2-2i$, representados no plano complexo, formam um triângulo retângulo, pois $|z_2-z_1|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$, em que $|z|$ indica o módulo do número complexo $z$.

Com base no exposto,

a) verifique que os números $z_1=-2$, $z_2=i$ e $z_2-z_1$, representados no plano complexo, formam um triângulo retângulo. **(12,0 pontos)**

b) determine os números $z \in \mathbb{C}$, tais que as representações no plano complexo de $z_1=2$, $z_2=z$ e $z_2-z_1$ formem um triângulo retângulo. **(13,0 pontos)**

## QUESTÃO 4

Equações polinomiais da forma $x^{2n}+ax^n+b=0$, $n \in \mathbb{N}$, são redutíveis a equações do segundo grau por meio da mudança de variável $x^n=y$. Deste modo, suas $2n$ raízes complexas podem ser obtidas mediante a resolução da equação do segundo grau correspondente. Um exemplo desse tipo de equações são as equações biquadradas, como $x^4+3x^2-4=0$.

Com base no exposto,

a) encontre a equação do segundo grau correspondente a $x^4+3x^2-4=0$. **(12,0 pontos)**

b) determine as quatro raízes complexas da equação $x^4+3x^2-4=0$. **(13,0 pontos)**